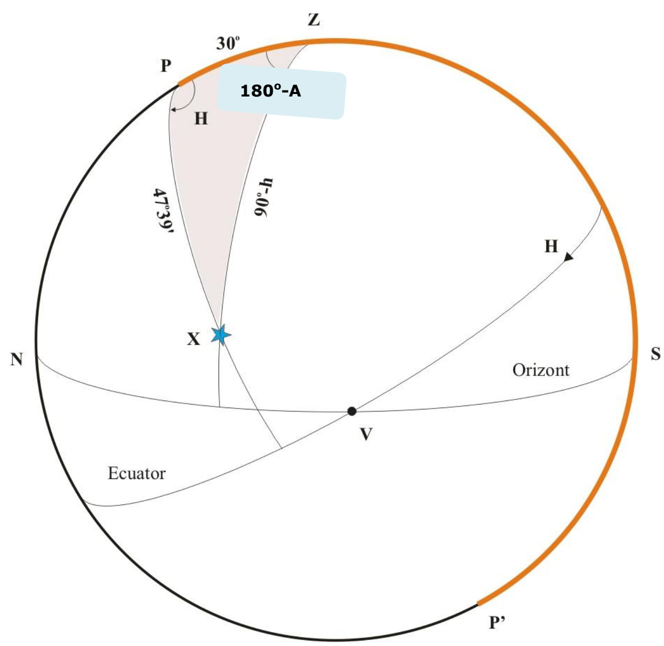
Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică
Ilfov, 3 aprilie 2012
Barem proba teoretică
Seniori

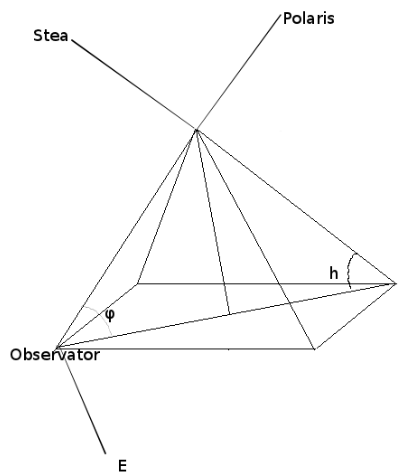
Subiectul I (10 puncte)	
Soluții:	**Punctaj total**
Problema 1.1.	**2,00 p**
$h_{cs} = 90 - \varphi_1 + \delta_1$ $\delta_1 = 38^o 47'$	0,20p
Pentru unghiul orar corespunzător răsăritului/apusului găsim următoarea formulă: $\cos H = -\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta$ Timpul deasupra orizontului: 2 H_{apus} datorită simetriei figurii	0,50p
Jocul nu are câștigători, deci timpul deasupra orizontului este egal $2H_1 = 2H_2$ $\cos H_1 = \cos H_2 \Rightarrow -\mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\delta_1 = -\mathrm{tg}\,\varphi_2\,\mathrm{tg}\,\delta_2$	0,30p
$tg\varphi_2 = \dfrac{tg\varphi_1 \cdot tg\delta_1}{tg\delta_2}$	0,90p
$\varphi_2 = 74^0,15$	0,10p
Problema 1.2.	**2,00 p**
Luminozitățile celor două componente sunt: $L_A = 4\pi R^2 \sigma T_A^4$ și $L_B = 4\pi R^2 \sigma T_B^4$.	0,15 p
Porțiunea plată a curbei corespunde luminozității totale $L_{tot} = L_A + L_B$.	0,15 p
Luminozitățile pot fi exprimate ca magnitudini bolometrice absolute : $M_{bol} - M_{bol,\odot} = -2,5\,lg\dfrac{L}{L_\odot}$.	0,20 p
Astfel: $m_A - m_{tot} = M_A - M_{tot} = -2,5\,lg\dfrac{L_A}{L_{tot}} = 2,5\,lg\dfrac{L_{tot}}{L_A} = 2,5\,lg\dfrac{4\pi R^2\sigma T_A^4 + 4\pi R^2\sigma T_B^4}{4\pi R^2\sigma T_A^4} =$ $= 2,5\,lg\left[1 + \left(\dfrac{T_B}{T_A}\right)^4\right]$	0,50 p
$m_A - m_{tot} = +3,8$.	0,10 p
$m_B - m_{tot} = M_B - M_{tot} = -2,5\,lg\dfrac{L_B}{L_{tot}} = 2,5\,lg\dfrac{L_{tot}}{L_B} = 2,5\,lg\dfrac{4\pi R^2\sigma T_A^4 + 4\pi R^2\sigma T_B^4}{4\pi R^2\sigma T_B^4} =$ $= 2,5\,lg\left[1 + \left(\dfrac{T_A}{T_B}\right)^4\right]$	0,50 p
$m_B - m_{tot} = +0,03$.	
Conform graficului prima componentă eclipsată este cea mai strălucitoare.	0,10 p

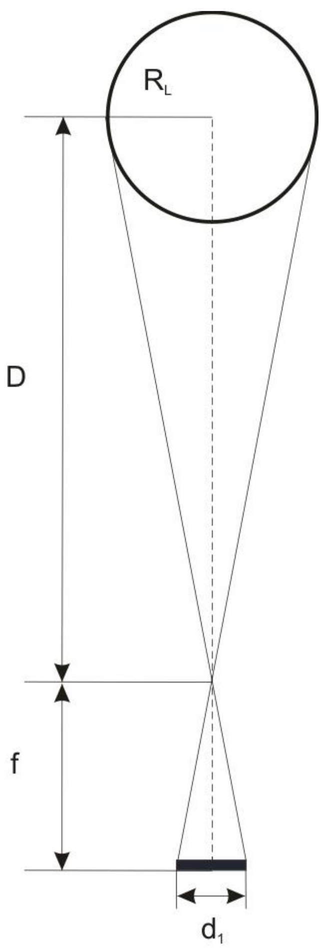
	0,30 p
Problema 1.3	**2,00 p**
Un capăt al discului solar se îndreaptă către observator în timp ce celălalt capăt se depărtează. Unghiul θ între direcția în care se deplasează marginile discului solar și direcția de observație este mic $\left(\cos\theta \approx 1\right)$.	0,30 p
Atunci se poate scrie: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2\omega R_{\odot}}{c}$,	1,00 p
unde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ este viteza unghiulară a Soarelui, iar c este viteza luminii în vid.	0,30 p
Prin urmare: $\omega = \frac{c\Delta\lambda}{2R\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{c\Delta\lambda}{2R\lambda} \Rightarrow T = \frac{4\pi R\lambda}{c\Delta\lambda}$.	0,30 p
Numeric: $T = \frac{4\pi R\lambda}{c\Delta\lambda} = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 6{,}95\cdot \cancel{10^8}\ \cancel{m}\cdot 0{,}59\cdot 10^{-6}\ \cancel{m}}{3\cdot \cancel{10^8}\ \frac{\cancel{m}}{s}\cdot 8\cdot 10^{-12}\ \cancel{m}} = 2145928{,}33\ \text{s} = 24{,}84$ zile .	0,10 p
Problema 1.4	**2,00 p**
a) (1 punct) pentru steagul *Uniunii Europene* și steagul *S.U.A.* Numărând stelele și aplicând legea lui *Pogson*:	
$\frac{E_{sistem}}{E_s} = 10^{0,4(m_s - m_{sist})}$	0,20 p
$\frac{n \times E_s}{E_s} = 10^{0,4(m_s - m_{sist})}$ $n = 10^{0,4(m_s - m_{sist})}$	0,20 p
Pentru U.E. n=12 $12 = 10^{0,4(1 - m_{sist})}$ $\frac{\lg 12}{0{,}4} = 1 - m_{sist}$	0,20 p
$m_{sist} = -1{,}69^m$	0,10 p
Pentru S.U.A. n=50 $50 = 10^{0,4(2 - m_{sist})}$ $\frac{lg 50}{0{,}4} = 2 - m_{sist}$	0,20 p
$m_{sist} = -2{,}24^m$	0,10 p
b) (1 punct) pentru *China*: aplicând *Pogson*: $\frac{E_{sist}}{E_{s1}} = 10^{0,4(m_{s1} - x)}$	0,20 p

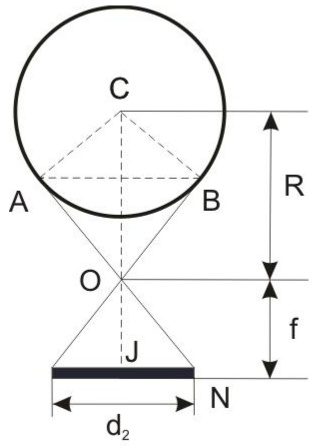
$$\frac{\frac{L_{S1}+4\times L_{s2}}{4\pi d^2}}{\frac{L_{s1}}{4\pi d^2}}=10^{0,4(m_{s1}-x)}$$ $$\frac{E_1+4E_2}{E_1}=10^{0,4(m_{s1}-x)}$$ $$1+4\times\frac{E_2}{E_1}=10^{0,4(m_{s1}-x)}$$ $$1+4\times 10^{0,4(m_1-m_2)}=10^{0,4(m_{s1}-x)}$$ $$1+4\times 10^{-0,4}=10^{0,4(m_{s1}-x)}$$ $$\frac{lg2,6}{0,4}=1-x$$ $$x=-0,03^m$$	0,20 p 0,20 p 0,20 p 0,10 p 0,10 p
Problema 1.5	**2,00 p**
Din figură se obține: $PX=90^\circ-\delta=90^\circ-42^\circ21'=47^\circ39'$.	0,10 p
	0,50 p
Convertim valoarea unghiului orar în mărimi unghiulare:	0,20 p

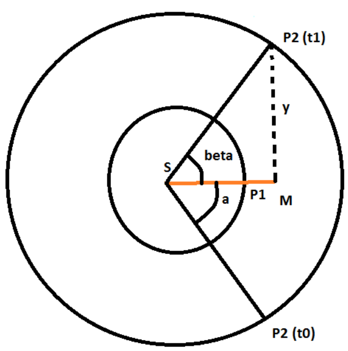
$H = 8^h 16^m 42^s = 8^h + 16^m + 42^s =$ $= (8 \cdot 15)^o + \left(\frac{16}{4}\right)^o + \left(\frac{40}{4}\right)' + (2 \cdot 15)'' =$ $= 120^o + 4^o + 10' + 30'' =$ $= 124^o 10',5$ Deci: $H = \sphericalangle ZPX = 124^o 10',5$ $PZ = 90^o - \varphi = 90^o - 60^o = 30^o$	0,20 p
Se aplică teorema cosinusului în triunghiul sferic PZX: $\cos ZX = \cos 30^o \cos 47^o 39' + \sin 30^o \sin 47^o 39' \cos 124^o 10',5$ sau:	0,40 p
$\sin h = \cos 30^o \cos 47^o 39' - \sin 30^o \sin 47^o 39' \cos 55^o 49',5 =$ $= \cos 30^o \cos 47^o,6500 - \sin 30^o \sin 47^o,6500 \cos 55^o,8253 \Rightarrow$ $h = 22^o 04',6$	0,10 p
Aplicând din nou teorema cosinusului în triunghiul sferic PZX: $\cos 47^o 39' = \cos 30^o \cos(90^o - h) + \sin 30^o \sin(90^o - h) \cos(180^o - A)$ sau $\cos 47^o 39' = \cos 30^o \sin 22^o 04',6 - \sin 30^o \cos 22^o 04',6 \cos A \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos A = \dfrac{\cos 30^o \sin 22^o,0760 - \cos 47^o,65}{\sin 30^o \cos 22^o,0760}$	0,40 p
Deci rezultă: $A = 138^o,37 = 138^o 22' 12''$.	0,10 p

Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică
Ilfov, 3 aprilie 2012
Barem proba teoretică
Seniori

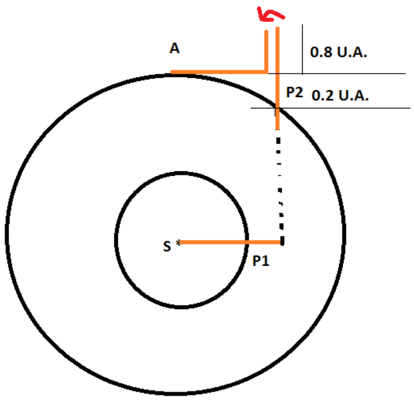
<table>
<tr><td colspan="2">SUBIECTUL II</td></tr>
<tr><td>Soluție:</td><td>Punctaj total</td></tr>
<tr><td>Problema 2a)</td><td>4p</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>a) (4 puncte)
Un exemplu de metodă pe care ar fi putut-o utiliza astronomul este:
1) Utilizează trepiedul pentru a măsura lungimea unei laturi.
Observaţie: datorită faptului că trepiedul are înălţime reglabilă pot măsura lungimea şi atunci când aceasta nu e neapărat un multiplu al înălţimii trepiedului.</td><td>0,50p</td></tr>
<tr><td>2) Faptul că muchia este orientată pe direcţia Nord spre steaua polară atrage după sine faptul că triunghiul din figură este chiar în planul meridian al locului.
Astfel steaua din partea opusă se află la culminaţia superioară</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>3) Aplicând teorema sinusului în trinnghiul ΔVAC avem:
$h = h_{cs} = 90 - \varphi + \delta$</td><td>0.50 p</td></tr>
<tr><td>$\frac{\sin\varphi}{L} = \frac{\sin(\pi - \varphi - h)}{l\sqrt{2}} = \frac{\sin(\varphi + h)}{l\sqrt{2}}$
$L = \frac{l\sqrt{2} \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + h)}$</td><td>1,0 p</td></tr>
<tr><td>$H = L \sin h$</td><td>0,50 p</td></tr>
</table>

$$H = \frac{\mathbf{l\sqrt{2}\cdot \sin\varphi \cdot \sin h}}{\mathbf{\sin(\varphi + h)}}$$	0,50 p
2)b)	**6 p**
Perioada de revoluție a satelitului în jurul Lunii se determină astfel: $$m\omega^2 R = k\frac{mM_L}{R^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = k\frac{M_L}{R^2} \Rightarrow T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{kM_L}}$$	1 p
iar $mg_L = k\frac{mM_L}{R_L^2} \Rightarrow kM_L = g_L R_L^2$	0,20 p
Din cele două relații se obține pentru perioada de revoluție a satelitului: $$T = \frac{2\pi R}{R_L}\sqrt{\frac{R}{g_L}}$$ (1) unde: • R - raza orbitei satelitului; R_L - raza Lunii;	0,40 p
 Figura 1 Imaginea Lunii se obține în planul focal al obiectivului.	0,60 p (desen)

Deoarece Luna se află la o distanță mult mai mare decât diametrul său, se poate considera că la fotografierea de pe Pământ (figura 1) sunt valabile relațiile:	0,40 p
$\frac{d_1}{2R_L}=\frac{f}{D}\Rightarrow R_L=\frac{d_1D}{2f}$ (2)	0,50 p
La fotografierea de pe satelit se obține pe placa fotografică imaginea unei părți a suprafeței Lunii, mărginită de tangentele OA și OB (figura 2).	1,00 p
Figura 2	0,60 p (desen)
Din asemănarea triunghiurilor OCB și OJN rezultă: $\frac{R}{ON}=\frac{2R_L}{d_2}\Rightarrow R=\frac{2R_L\cdot ON}{d_2}=\frac{2R_L\cdot\sqrt{f^2+\frac{d_2^2}{4}}}{d_2}$ (3).	
Folosind (2), (3) devine: $R=\frac{2R_L\cdot\sqrt{f^2+\frac{d_2^2}{4}}}{d_2}=\frac{\cancel{2}\frac{d_1D}{\cancel{2}f}\cdot\sqrt{f^2+\frac{d_2^2}{4}}}{d_2}\Rightarrow R=\frac{d_1D\cdot\sqrt{4f^2+d_2^2}}{2fd_2}$ (4).	0,40 p
(4) și (2) introduse în (1) permite obținerea perioadei cerute: $T=\frac{2\pi R}{R_L}\sqrt{\frac{R}{g_L}}=2\pi\frac{\frac{\cancel{d_1D}\cdot\sqrt{4f^2+d_2^2}}{\cancel{2f}\,d_2}}{\frac{\cancel{d_1D}}{\cancel{2f}}}\sqrt{\frac{\frac{d_1D\cdot\sqrt{4f^2+d_2^2}}{2fd_2}}{g_L}}=$	0,40 p
$=2\pi\frac{\sqrt{4f^2+d_2^2}}{d_2}\sqrt{\frac{d_1D\cdot\sqrt{4f^2+d_2^2}}{2fd_2g_L}}$	0,40 p
Numeric $T\approx 6{,}23\cdot10^4\ s$	0,1 p

SUBIECTUL III (10 puncte)	
Soluție:	**Punctaj total**
3)a)	**3,0 p**
	
$i)\ (\ 1\ punct)$	
$y = \sqrt{400-4} = \sqrt{396} = 19{,}8\ U.A.$	0,20 p
$\Delta t = \frac{19{,}8}{0{,}5} = 39{,}6\ ani$	
Aplicand Legea a III-a a lui Kepler:	0,50 p
$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$ $T_2 = \sqrt{203} \cong 89\ ani$ $\alpha = \frac{39{,}6 \times 360}{89} = 160{,}7°$	
In triunghiul SMP_2 gasesc: $\cos\beta = \frac{2}{20}$	
$\beta = arc\cos 0{,}1 = 84°$ $a = \alpha - \beta = 76°$	0,30 p

<table>
<tr>
<td>



ii) (2 puncte) Conform enunțului, la contactul cu P2 trenul crește în lungime cu 1 U.A., vagoanele adăugându-se în fața primului vagon.

Astfel trenul se află în avans cu 0,8 U.A.față de direcția tangentă în punctul A (vezi figura), astfel trenul va trebui să facă 2 manevre succesive la stânga, urmate de una la dreapta când a ajuns pe direcția tangentei.
Se acceptă orice rezolvare care conduce la soluția corectă.
Întrucât cele două manevre se întâmplă instantaneu, avem de calculat:

$$t_A = \frac{0,8+2}{\frac{0,5\, U.A.}{an}} = \frac{2,8\, U.A.}{\frac{0,5\, U.A.}{an}} = 5,6\ ani$$

Evident ca drumul spre punctul A este cel mai scurt. (A-punct de tangenta)
Raspuns. Planeta P1 face 5 rotatii complete.

</td>
<td>

0,50 p
(desen)

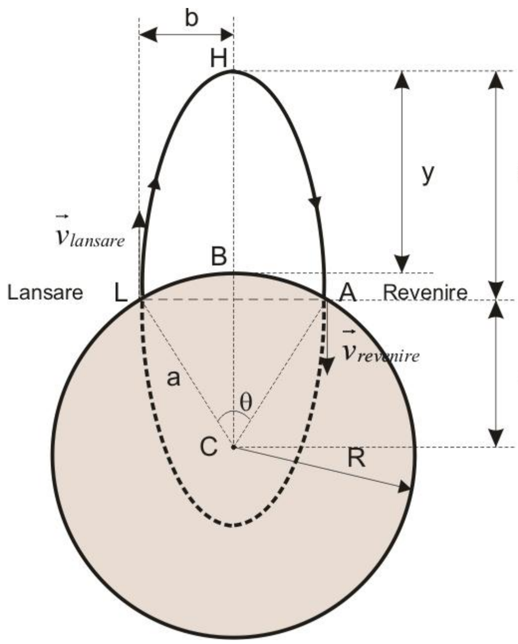
0,5 p

1,0 p

</td>
</tr>
<tr>
<td>**3)b)**(3 puncte)</td>
<td>**3,0 p**</td>
</tr>
<tr>
<td>

b) Conform primei legi a lui *Kepler*, traiectoria rachetei este o elipsă care are în unul dintre focare planeta. Deoarece vitezele de lansare și revenire sunt paralele (au însă sensuri opuse) înseamnă că punctele de plecare și revenire sunt la capetele semiaxei mici a traiectoriei eliptice; deci $a = R$ (ca în figura alăturată).

</td>
<td>0,30 p</td>
</tr>
</table>



0,30 p (desen)

Conform legii a treia a lui *Kepler*, sateliţi cu excentricităţi diferite, dar cu aceeaşi lungime a semiaxei mari, au aceeaşi perioadă; astfel, racheta care se deplasează pe traiectoria eliptică cu semiaxa mare $a = R$ şi satelitul care se deplasează în imediata vecinătate a planetei pe o traiectorie circulară cu raza R, au aceeaşi perioadă de revoluţie: T_0. Racheta parcurge doar jumătate din elipsă, însă timpul de parcurgere a acestei jumătăţi nu este $\frac{T_0}{2}$, ci este proporţional (conform legii a doua a lui *Kepler*) cu aria măturată de raza vectoare ce uneşte focarul cu racheta.

0,40 p

Prin urmare: $A_{măturată\ de\ rachetă} = \frac{A_{elipsă}}{2} + A_{LAC}$,

0,30 p

unde

$$A_{elipsă} = \pi ab = \pi a^2 \sin\frac{\theta}{2}$$

0,30 p

iar,

$$A_{LAC} = \frac{1}{2}\cdot 2bc = a^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

0,30 p

Astfel: $A_{măturată\ de\ rachetă} = \frac{1}{2}\pi a^2 \sin\frac{\theta}{2} + a^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

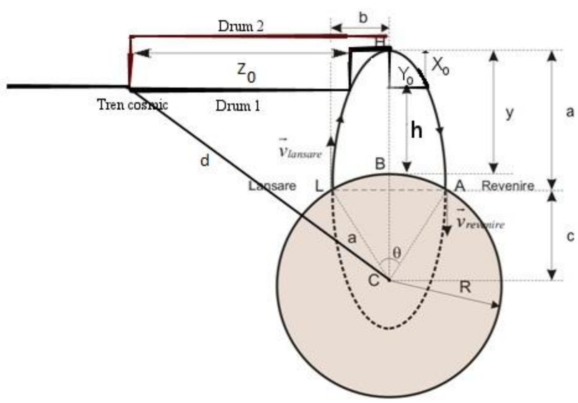
0,30 p

Timpul total de zbor al rachetei va fi:

$$T_1 = \frac{A_{măturată\ de\ rachetă}}{A_{elipsă}} T_0 = \frac{\frac{1}{2}\pi a^2 \sin\frac{\theta}{2} + a^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\pi a^2 \sin\frac{\theta}{2}} T_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\right) T_0 .$$

0,80 p

3)c) (4 puncte)	**4,0 p**

Rezolvare:	
Deplasarea trenului, între momentul plecarii (al trenului si lansare al rachetei) si momentul întâlnirii cu racheta, în condițiile problemei, se poate face pe orice traiectorie aflată în interiorul dreptunghiului de lungime $Z_0 + Y_0$ și lățime $H_{max} - h$.	1,0 p
	0,25 p (desen)
Pentru că toate drumurile sunt echivalente din punct de vedere al duratei de deplasare a trenului până la întâlnirea cu rachetă, alegem drumul 1 (vezi figura) și : $a = R$ $b = R\sin\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}$, $e = R\cos\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}$	0,25 p
Din conservarea momentului cinetic pe elipsă avem: $V_L R \sin(\pi - \frac{\theta}{2}) = V_H(R(1+e))$ $V_H = \dfrac{V_L \cdot \sin\frac{\theta}{2}}{1 + \cos\frac{\theta}{2}}$	0,3 p

Pentru ca viteza relativă să fie nulă $\Rightarrow$ $v_{tren} = v_H$	
Deoarece timpul în care „şarpele” parcurge distanţa corespunzătoare este egalcu cel în care racheta face jumătate din timpul de zbor	
$$\frac{x_o + y_o + z_o}{V_H} = \frac{T_1}{2}$$	0,2 p
$$y_o + z_o = \frac{V_H \cdot T_1}{2} - x_o$$	1,0 p
$$x_o = R\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right) - h - R = R\cos\frac{\theta}{2} - h$$	0,5 p
$$y_o + z_o = \frac{V_H \cdot T_1}{2} - R\cos\frac{\theta}{2} + h$$	
$$d = \sqrt{(y_o + z_o)^2 + (R+h)^2}$$	0,1 p
Echivalenţa temporală a drumurilor din interiorul dreptunghiului menţionat impune existenţa unei infintăţi de soluţii.	0,4 p